1.4.1 Zehnerpotenzen

Kommt in einem Produkt immer derselbe Faktor vor, so schreibt man das Produkt in der Potenzschreibweise. Zahlen in der Form 10^5 heissen Zehnerpotenzen.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 \qquad \text{sprich: 'Zehn hoch Fünf'}$$

Die Hochzahl (= Exponent) gibt an, wie viel Mal der Faktor 10 mit sich selbst multipliziert werden muss. Das ausgerechnete Produkt nennt man Potenzwert.

Rechenregel:

Begriffe: $\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenzwert}$ z.B. $10^5 = 100\,000$

Untenstehende Übersicht zeigt Zehnerpotenzen mit positiven und negativen Hochzahlen:

10^3	$= 10 \cdot 10 \cdot 10$	1 000	Eins mit 3 Nullen
10^2	$= 10 \cdot 10$	100	Eins mit 2 Nullen
10^1	$= 10$	10	Eins mit 1 Null
10^0	$= 1$	1	Eins mit 0 Nullen
10^{-1}	$= \frac{1}{10}$	0.1	Eins an der 1. Nachkommastelle
10^{-2}	$= \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$	0.01	Eins an der 2. Nachkommastelle
10^{-3}	$= \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$	0.001	Eins an der 3. Nachkommastelle

Rechenregel:

Bei Zehnerpotenzen gibt die *positive* Hochzahl die Anzahl der Nullen der Zahl an.
Bei Zehnerpotenzen gibt die *negative* Hochzahl die Anzahl der Nachkommastellen an.

Übung:

❶ Schreiben Sie die Zahlen mit Zehnerpotenzen.

a) $10\,000 =$ 10^4

b) $0.01 =$ 10^{-2}

c) $1\,000\,000 =$ 10^6

d) $0.000\,01 =$ 10^{-5}

e) $8\,000 =$ $8 \cdot 1000 = 8 \cdot 10^3$

f) $0.07 =$ $7 \cdot 0.01 = 7 \cdot 10^{-2}$

g) $0.000\,95 =$ $9.5 \cdot 10^{-4}$

h) $760\,000 =$ $7.6 \cdot 10^5$

i) $0.00127 =$ $1.27 \cdot 10^{-3}$

2.6 Ausmultiplizieren

Wird ein gesamter Summenterm multipliziert, spricht man von *ausmultiplizieren*.

Beispiel: $3 \cdot (a+2b) = (a+2b)+(a+2b)+(a+2b) = \underline{\underline{3a+6b}}$

$3 \cdot (a+2b)$

Man multipliziert eine Zahl mit einer Summe, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert.

$\color{red}{3} \cdot (a+2b) = \color{red}{3} \cdot a + \color{red}{3} \cdot 2b = \underline{\underline{3a+6b}}$

Beispiel:

Multiplizieren Sie folgende Terme.

$6 \cdot (3x+4y) = \underline{\underline{18x+24y}}$

$(-2a) \cdot (3b+2c) = \underline{\underline{-6ab-4ac}}$

$(-3a) \cdot (-4b) \cdot (5x+2y) = 12ab(5x+2y) = \underline{\underline{60abx+24aby}}$

Es ist auch möglich, zwei Summenterme miteinander zu multiplizieren.

$(a+2b) \cdot (3c-4d)$

Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert.

$(\color{red}{a}+\color{blue}{2b}) \cdot (3c-4d) =$

$\color{red}{a} \cdot 3c + \color{red}{a} \cdot (-4d) + \color{blue}{2b} \cdot 3c + \color{blue}{2b} \cdot (-4d) =$

$\underline{\underline{3ac-4ad+6bc-8bd}}$

Beispiel:

Multiplizieren Sie folgende Summenterme.

$(x+2y)(a+b) = \underline{\underline{ax+bx+2ay+2by}}$ Variabeln sind *alphabetisch* zu *ordnen*!

$(a-2b)(3c-2b) = \underline{\underline{3ac-2ab-6bc+4b^2}}$

Übung:

❶ Multiplizieren Sie die Summenterme aus.

a) $2x \cdot (3ab+7b) =$

$\underline{\underline{6abx+14bx}}$

b) $(5a+3)(4-6b) =$

$20a-30ab+12-18b =$

$\underline{\underline{20a-30ab-18b+12}}$

Aufgabe 79

c) $(2a-c)(a-2c) =$

$2a^2-4ac-ac+2c^2 =$

$\underline{\underline{2a^2-5ac+2c^2}}$

d) $(a+b)(b-5a+e) =$

$ab-5a^2+ae+b^2-5ab+be =$

$\underline{\underline{-5a^2-4ab+ae+b^2+be}}$

3 Gleichungen

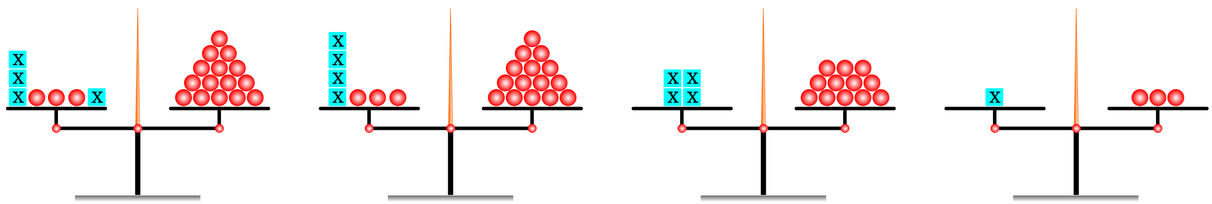
3.1 Auflösen von Gleichungen

Sind zwei verschiedene Terme mit einem *Gleichheitszeichen* verbunden, so spricht man von einer *Gleichung*.

$$\underbrace{\underbrace{3x+3+x}_{\text{Term}} = \underbrace{15}_{\text{Term}}}_{\text{Gleichung}}$$

Eine Gleichung enthält in der Regel eine Variable - meistens x. Es gilt, die Variable x so zu bestimmen, dass die Gleichung erfüllt ist. Das Lösen einer Gleichung besteht nun darin, die Gleichung so umzuformen bis die gesuchte Variable x alleine auf einer Seite steht.

Dazu muss man sich die Gleichung als Balkenwaage vorstellen. Wird auf der einen Seite der Waage etwas verändert, muss auf der anderen Seite die gleiche Veränderung vorgenommen werden, sonst ist die Waage nicht mehr im Gleichgewicht.



ausführliche Schreibweise:

$$\begin{aligned}
3x+3+x &= 15 && \mid \text{TU}\\
4x+3 &= 15 && \mid -3\\
4x+3\color{red}{-3} &= 15\color{red}{-3} && \mid \text{TU}\\
4x &= 12 && \mid :4\\
\frac{4x}{\color{red}{4}} &= \frac{12}{\color{red}{4}} && \mid \text{TU}\\
x &= \underline{\underline{3}}
\end{aligned}$$

übliche Schreibweise:

$$\begin{aligned}
3x+3+x &= 15 && \mid \text{TU}\\
4x+3 &= 15 && \mid -3\\
4x &= 12 && \mid :4\\
x &= \underline{\underline{3}}
\end{aligned}$$

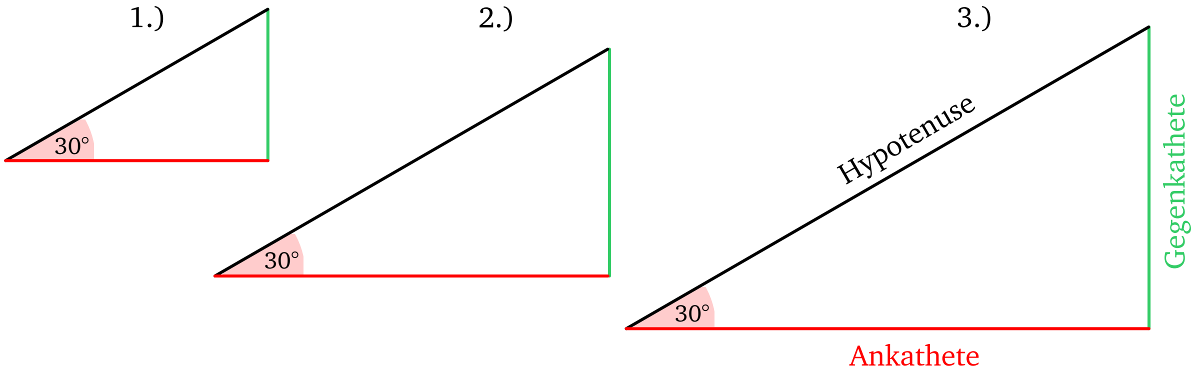
Die Umformungsschritte dürfen die Lösung einer Gleichung nicht verändern. Die umgeformte Gleichung muss *äquivalent* (d.h. gleichwertig) zur vorhergehenden Gleichung sein. Aus diesem Grund nennt man diese Umformungen *Äquivalenzumformungen*.
Äquivalenz- und Termumformungen (TU) schreibt man rechts neben der Gleichung an.

Rechenregel:

Beim Lösen von Gleichungen dürfen folgende *Äquivalenzumformungen* gemacht werden:

1. auf beiden Seiten die gleiche Zahl addieren bzw. subtrahieren.
2. auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren bzw. dividieren.

Nachfolgend sind drei ähnliche Dreiecke gezeichnet. Diese haben alle gleiche Winkel jedoch unterschiedliche Seitenlängen.



Übung:

a) Bestimmen Sie in jedem Dreieck das Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Was fällt Ihnen auf?

$$\frac{GK}{H} = \frac{2\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = \frac{4\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = \underline{\underline{0.5}}$$

Unabhängig von der Dreiecksgrösse ist das Verhältnis immer gleich 0.5.

Das Verhältnis $\frac{GK}{H}$ nennt man *Sinus*. Schreibweise: $\sin(30^\circ) = 0.5$

b) Bestimmen Sie in jedem Dreieck das Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Was fällt Ihnen auf?

$$\frac{AK}{H} = \frac{3.46\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = \frac{5.19\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = \frac{6.92\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} \approx \underline{\underline{0.866}}$$

Unabhängig von der Dreiecksgrösse ist das Verhältnis immer gleich 0.866.

Das Verhältnis $\frac{AK}{H}$ nennt man *Cosinus*. Schreibweise: $\cos(30^\circ) \approx 0.866$

c) Bestimmen Sie in jedem Dreieck das Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$. Was fällt Ihnen auf?

$$\frac{GK}{AK} = \frac{2\,\text{cm}}{3.46\,\text{cm}} = \frac{3\,\text{cm}}{5.19\,\text{cm}} = \frac{4\,\text{cm}}{6.92\,\text{cm}} \approx \underline{\underline{0.577}}$$

Unabhängig von der Dreiecksgrösse ist das Verhältnis immer gleich 0.577.

Das Verhältnis $\frac{GK}{AK}$ nennt man *Tangens*. Schreibweise: $\tan(30^\circ) \approx 0.577$

Die Trigonometrie nutzt die Tatsache, dass die Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke gleich sind. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, gesuchte Winkel durch Streckenverhältnisse auszudrücken. Man bezeichnet ein solches Streckenverhältnis als Winkelfunktion.

5.3 Lineare Darstellung

Eine lineare Funktion hat die allgemeine Funktionsgleichung:

$$\boxed{y = f(x) = m \cdot x + q}$$

In dieser Funktionsgleichung bedeuten:

y = die abhängige Variable
x = die unabhängige Variable
m = die Steigung (ist eine beliebige Zahl - auch negativ)
q = der y-Achsenabschnitt (ist eine beliebige Zahl)

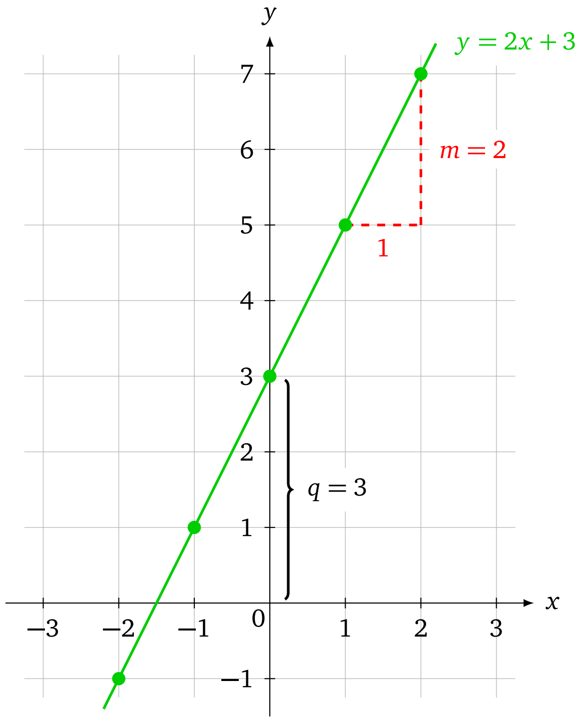
Die Funktion $y = f(x) = 2x + 3$ soll in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Dies soll mithilfe einer Wertetabelle erfolgen. Wir bestimmen die zugehörigen y-Werte, indem wir beliebige Werte für x in den Term rechts des Gleichheitszeichens einsetzen.

Wertetabelle:

$$\boxed{y = 2x + 3}$$

x	y	
−2.0	−1.0	
−1.0	1.0	
0.0	3.0	$= q$
1.0	5.0	
2.0	7.0	
...	...	

Darstellung der Funktion:



In diesem Fall hat die Steigung den Wert $m = 2$ und der y-Achsenabschnitt hat den Wert $q = 3$.

Rechenregel:

Jede Funktion mit der allgemeinen Funktionsgleichung $y = m \cdot x + q$ hat als Graph eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt q.

Die Steigung m einer Geraden kann positiv oder negativ sein.

Ist der Wert der Steigung *positiv*, so *steigt* die Gerade. D.h. nimmt der x-Wert um 1 zu, so nimmt der Funktionswert y um m *zu*.

Ist der Wert der Steigung *negativ*, so *fällt* die Gerade. D.h. nimmt der x-Wert um 1 zu, so nimmt der Funktionswert y um m *ab*.

Auf Bergstrassen sieht man vor Steigungsstrecken oft Warnschilder mit einer Angabe der Steigung in Prozent. Der Wert 16 % bedeutet, dass man pro 1 m, den man geradeaus fahren würde, eben auch gleichzeitig 0.16 m nach oben fährt.

Das Verhältnis von 'nach oben' zu 'geradeaus' beträgt dann $\frac{0.16\,\text{m}}{1\,\text{m}} = 0.16 = \underline{\underline{16\,\%}}$.

1.7 Umstellen von einfachen Formeln

59. Aufgabe

Stellen Sie die Formeln nach den gesuchten Variablen um. Alle diese Formeln werden Sie im ersten Lehrjahr in den Fächern *Elektrotechnik* und *erweiterte Fachtechnik* antreffen.

a) $\boxed{P = U \cdot I}$ $U = ?$

b) $\boxed{W = m \cdot g \cdot h}$ $h = ?$

c) $\boxed{A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$ $d = ?$

d) $\boxed{R = \frac{\rho \cdot l}{A}}$ $\rho = ?$ $A = ?$

e) $\boxed{J = \frac{I}{A}}$ $I = ?$ $A = ?$

f) $\boxed{P = I^2 \cdot R}$ $I = ?$ $R = ?$

g) $\boxed{Q = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta}$ $\Delta\vartheta = ?$ $m = ?$

h) $\boxed{P = \frac{n \cdot 3600}{c \cdot t}}$ $c = ?$ $n = ?$

i) $\boxed{s = \frac{a \cdot t^2}{2}}$ $a = ?$ $t = ?$

j) $\boxed{\Delta R = R_{20} \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta}$ $\alpha = ?$ $R_{20} = ?$

k) $\boxed{P = \frac{U^2}{R}}$ $U = ?$ $R = ?$

l) $\boxed{v = v_0 + a \cdot t}$ $a = ?$ $v_0 = ?$

m) $\boxed{R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ $R_2 = ?$

n) $\boxed{R = R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)}$ $\alpha = ?$

60. Aufgabe

Suchen Sie alle falschen Umformungen und kreuzen Sie diese an. Korrigieren Sie!

a) $\boxed{P = \frac{F \cdot s}{t}}$ ☐ $F = \frac{P \cdot t}{s}$ ☐ $s = \frac{P \cdot t}{F}$ ☐ $t = \frac{P}{F \cdot s}$

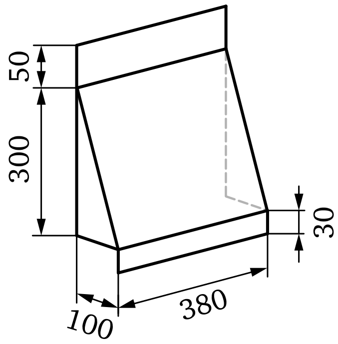
b) $\boxed{Z^2 = R^2 + X^2}$ ☐ $Z = R + X$ ☐ $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ ☐ $R = \sqrt{Z^2 + X^2}$

c) $\boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$ ☐ $R_i = \frac{U - U_0}{I}$ ☐ $I = \frac{U - U_0}{R_i}$ ☐ $R_i = \frac{U_0 - U}{I}$

d) $\boxed{W = \frac{C \cdot U^2}{2}}$ ☐ $U = \sqrt{\frac{W \cdot C}{2}}$ ☐ $C = \frac{2 \cdot W}{U}$ ☐ $U = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{C}}$

245. Aufgabe

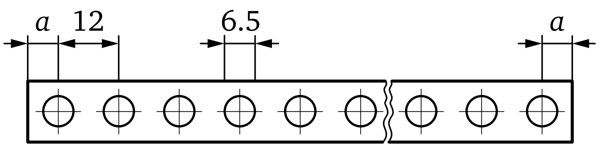
Bestimmen Sie den Blechbedarf in dm^2 für die skizzierte Abdeckung.



246. Aufgabe

In ein rundes Bohrloch mit einem Durchmesser von 22 mm soll ein quadratischer Bolzen einführt werden. Welche Kantenlänge darf der Bolzen höchstens haben?

247. Aufgabe



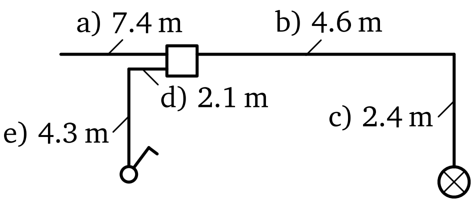
Ein Kupferlochband von 45.4 cm Länge hat 38 Löcher von je 12 mm Abstand. Die Löcher haben einen Durchmesser von je 6.5 mm.

Wie gross sind die zwei Endabstände a?

248. Aufgabe

Berechnen Sie für jedes Teilstück a) bis e) die Anzahl Briden.

Die Endabstände müssen 5 cm gross sein und die Bridenabstände dürfen maximal 60 cm betragen.



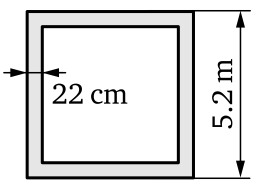
249. Aufgabe

Die Radien eines Kreisringes betragen $R = 6\,\text{cm}$ und $r = 4\,\text{cm}$.

a) Wie gross ist der Flächeninhalt des Kreisringes?

b) Wie gross ist der Radius *eines* Kreises zu wählen, wenn dieser zum Kreisring flächengleich sein soll?

250. Aufgabe



Gegeben ist eine symmetrische und quadratische Deckenbeleuchtung.

Wie gross ist die grau mattierte Fläche, durch die Licht abgegeben wird?